受験番号 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

東京大学大学院工学系研究科原子力国際専攻
平成 19 年度大学院修士課程

「論理的思考能力を見るための数理的問題」
入学試験問題および解答用紙

平成 18 年 8 月 28 日（月）13:00～15:30

注意事項

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子を開いてはいけません．

2. 落丁，乱丁，印刷不鮮明の箇所を見出した場合には挙手し，試験監督者に伝えること．

3. このページの最上部の欄に受験番号のみ記入しなさい．それ以外の箇所に受験番号，氏名を書いてはいけません．

4. 問題は全部で 20 問あります．このうち任意の 15 問を選んで解答しなさい．**下の選択問題番号欄で，選択した問題の番号に〇をつけなさい．**

5. それぞれの問題の下に解答の道筋を書き，四角の中に答を記入しなさい．

6. 計算用紙は別に配布します．

選択した問題の番号に〇をつけなさい．16 問以上を選択し，解答することはできないので注意すること．

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

第 1 問

微分方程式

$$\frac{dy}{dx} + ay = \cos x$$

を、初期条件

$x = 0$ のとき、$y = 0$

のもとで解け。ただし、a は正の定数とする。

第 2 問

次のような関数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{e} & (x<0)\\ e^{-x} & (0\leq x)\end{cases}$$

がある。このとき、関数

$$F(x)=\int_{x-a}^{x}f(t)dt$$

の最大値およびそのときの x を求めよ。ただし、e は自然対数の底、a は正の定数とする。

第 3 問

関数 $f(x)=x^n e^{-x}$（n は 2 以上の整数であり一定）のグラフを $0 \leq x \leq 3n$ の範囲でスケッチせよ。特に、特徴的な点については定量的な情報も合わせて記すこと。

第 4 問

$mn - 3m - 2n = 0$ を満たす正の自然数 m, n の組をすべて求めよ。

第５問

$S(x)=\dfrac{x^4}{2\times4}+\dfrac{x^6}{2\times4\times6}+\dfrac{x^8}{2\times4\times6\times8}+\cdots$ とする。このとき以下の問いに答えよ。

（１） $S(x)$ が満たす１階の微分方程式を求めよ。

（２） 上記の微分方程式を解いて $S(x)$ を求めよ。

第 6 問

$S_N = \sum_{n=0}^{N} x^n$ とする。$x = i = \sqrt{-1}$ のとき、S_N の大きさを求めよ。ただし、複素数 $z = a + bi$ の大きさは、$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$ と定義する。

第 7 問

$0 < x < 2m$ の範囲の値をとり得る確率変数 x の確率分布関数が、次の形で与えられている:

$$f(x) = -A(x^2 - 2mx)$$

以下の各問いに答えよ。ただし、A, m は正の定数である。

(1) 確率分布関数を規格化あるいは正規化(normalize)することによって、A を定めよ。

(2) x の期待値(母集団平均)が m になることを証明せよ。

(3) $(x - m)^2$ の期待値(母分散)を求めよ。

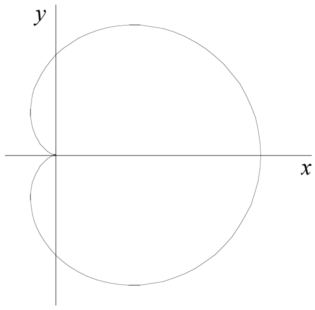
(4) $x_1, x_2, \cdots, x_n$ を確率変数 x の n 個の標本とする。標本平均 $\bar{x}$ を

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

で定義する。$\bar{x}$ の期待値もまた、m となることを証明せよ。

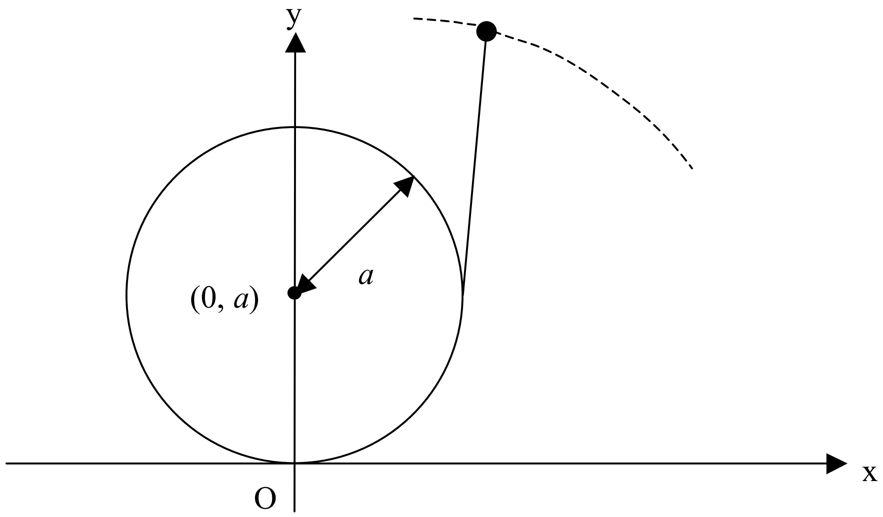
第 8 問

下図に示すカージオイド（心臓形）は極座標方程式 $r=1+\cos\theta$ で与えられる。これを x 軸の周りに回転させたときにできる立体の表面積 A を求めよ。



第 9 問

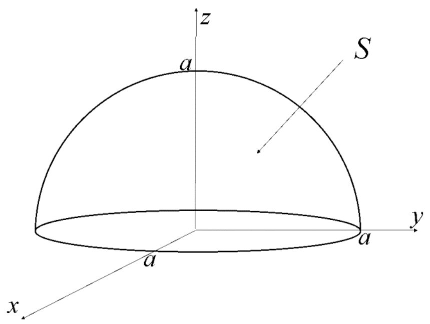
中心が$(0,a)$、半径aの円に、原点に結ばれている長さ$a\pi$の紐を巻きつける。このとき、紐の先端が描く曲線の長さを求めよ。ただし、第一象限のみ考える。



第 10 問

ベクトル $\boldsymbol{A}$ を $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-y+xz\\ x+yz\\ z+xy\end{pmatrix}$ とし､開曲面 S を半球面 $x^2+y^2+z^2=a^2 \quad (z\geq 0)$

とする。このとき、面積分 $\int_S (\nabla\times\mathbf{A})\cdot \boldsymbol{n}dS$ を求めよ。但し、$\boldsymbol{n}$ は開曲面 S の外向き法線ベクトルである。



第 11 問

以下の問いに答えよ。

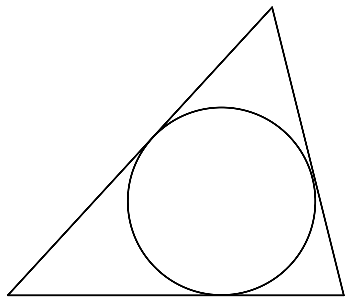
（１）ある円に外接する正六角形と内接する正六角形の面積の比を求めよ。
（２）ある円に外接する正 n 角形と内接する正 n 角形の面積の比を求めよ。

第 12 問

$x^2+y^2+z^2 \leq 9$ と $3x^2+3y^2-z^2-6z-9 \leq 0$ の両方を満たす領域の体積を求めよ。

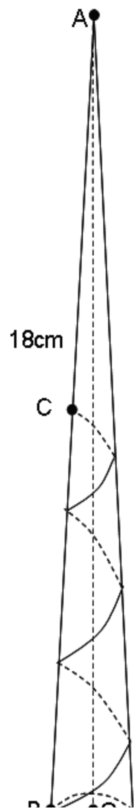
第 13 問

円（面積 A）に外接する三角形（面積 B）の辺の長さの合計を求めよ.



第 14 問

母線 AB の長さが 18cm、底面の半径が 1cm の円錐があり、AB の中点を C とする。点 B から円錐の側面上を 3 周して点 C に至る最短距離の長さを求めよ。



第 15 問

下の表において、異なる正の自然数を 9 つのマス目に入れる。そして、各行、各列、各対角線に並ぶ 3 つの数字の積がすべて同じ値となるように自然数を選ぶものとする。このとき、x の値を求めよ。

4	x	
		8
64		

第 16 問

以下の計算が成り立つとき、A × D − B × C を求めよ。ただし、A, B, C, D は 1 から 9 までの自然数である。

$$\begin{array}{r} B\,C\,A\,C \\ \underline{+\,B\,C\,D\,D} \\ C\,C\,B\,A \end{array}$$

第 17 問

暗号文「970」は「○□△☆×」、「2220」は「△□△☆×」、「2930」は「☆△□○×」で表される。このとき、「781」はどのように表されるか。

第 18 問

ある長方形を n 本の直線でできるだけ多くの小片に分割する。その小片の数を求めよ。

第 19 問

A, B, C, D, E の 5 人のうち、常に本当の事を言う正直者は 2 名だけである。残り 3 名は嘘つきであり、その言葉には嘘と本当が混ざっている。誰が嘘つきかという問いに対する 5 名の以下の返答をもとに、どの 2 名が正直者であるかを判断し、推論の過程を示せ。

A: 「C と D は嘘をつかない」
B: 「C は嘘つきだ」
C: 「D は嘘つきだ」
D: 「E は嘘つきだ」
E: 「B と C は嘘つきだ」

第 20 問

以下の(A)に入る数字は何か？

64→28→68→76→50→(A)→2→4→16→38→70